



Kopf und Zahl

JOURNAL

des Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.
in Zusammenarbeit mit den Mathematischen Instituten
zur Behandlung der Rechenschwäche

24. AUSGABE, Herbst 2015

www.dyskalkulie.de



Altbewährt,
seit über
2500 Jahren!



Rechnen lernen mit Kernfingerbildern und Kernstrukturen

Wolfgang Hoffmann,
Mathematisch Lerntherapeutisches Zentrum Dortmund, Bochum, Lüdenscheld

Kerstin Schuckmann, Klaus Dieter Stemler, Christian Bussebaum,
ILSA-Lernentwicklung Bochum

Vor ca. 20 Jahren geriet ein bis dahin altbewährtes Anschauungsmaterial beim Erlernen des Rechnens völlig zu Unrecht in Verruf: die Finger. Man hatte festgestellt, dass Kinder mit Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens zumeist zählende „Rechner“ waren, was auch heute noch richtig ist. Bei näherer Betrachtung wurde klar, dass diese Kinder nahezu alle an ihren Fingern abzählen – auch das ist richtig. Daraus zog man einen Schluss, der nicht korrekt ist: Es seien die Finger, die zum zählenden Rechnen verleiten würden. So manches Mathe-Buch wurde daraufhin gründlich renoviert. Zehner- und Zwanzigerfelder, die nebenbei bemerkt, natürlich die gleichen Fünferstrukturen aufweisen wie die Finger selbst oder der altbekannte Abakus, fanden sich nun in jedem Mathe- und Übungsbuch für die erste Klasse. Nicht dass Zehner- und Zwanzigerfelder ein schlechtes Anschauungsmaterial sind, ganz im Gegenteil. Aber das Ergebnis war insgesamt doch reichlich ernüchternd: Entweder die Kinder zählten nun mehr oder weniger heimlich an ihren Fingern ab oder sie benutzten gleich das neue Anschauungsmaterial zum Abzählen.

Es ist nicht das Anschauungsmaterial...

... das zum zählenden Rechnen führt. Abzählen lässt sich fast alles, mal weniger gut oder mal besser. Kein Anschauungsmaterial kann sich dagegen wehren – nicht das Zehnerfeld, nicht der Abakus oder die Hundertertafel und die Finger eben auch nicht. Neben der Frage „Welches Mathe-Buch würden sie empfehlen?“ ist auf unseren hundertsten von Fortbildungen an Schulen die zweitbeliebteste Frage: „Welches Anschauungsmaterial sollen wir nehmen?“ Die Antwort ist einfach: Alles, was vernünftig gruppierte Fünfer- und Zehnerstrukturen hat, ist in Ordnung.

Das zählende Rechnen ist notwendige Folge von Defiziten in der Entwicklung des vorschulischen Zahlbegriffs. Das betrifft besonders Kompetenzebene 3:¹ Zahlen sind aus Zahlen zusammengesetzt und der Unterschied zwischen zwei Zahlen ist wieder eine Zahl. Zählkinder kommen mit erheblichen Entwicklungsrückständen in die Schule. Davon betroffen ist der kardinale Aspekt der Zahl (mit dem man schließlich rechnet), bedeutet: Sie haben keine Ahnung vom Zahlaufbau selbst. Es ist dann auch keinesfalls verwunderlich, wenn ein Kind nicht weiß, dass die Anzahl acht aus den Anzahlen fünf und drei zusammgebaut ist, dass es dann bei der Aufgabe $3 + 5 = ?$ zum einzigen Mittel greift, das es aus seiner Vorschulzeit mitbringt, um diese Aufgabe zu lösen: **Es zählt ab!** An welchem Material es das dann tut, spielt eine untergeordnete Rolle.

¹ Prof. Dr. Kristin Krajewski „Entwicklungsorientierte Förderung früher mathematischer Kompetenzen“, Interview 12.08.2010 www.bildungserver.de/innovationsportal/bildungplus.html?artid=752

Inhalt

Rechnen lernen mit Kernfingerbildern und Kernstrukturen	1
Und mit Fingern geht noch viel mehr!	8
Impressum	12



Die Vorteile von Fingerbildern...

... liegen eigentlich sprichwörtlich auf der Hand:

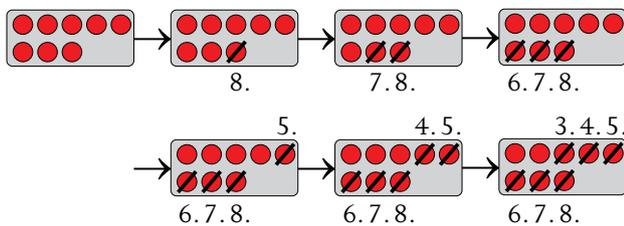
1) Die Kinder selbst trauen diesem Material viel mehr. Ob das im Zehnerfeld wirklich zehn angemalte Punkte sind, na ja, da zählt man besser noch mal nach. Aber dass ein Finger einfach abfällt, ist sehr unwahrscheinlich und dazu wachsen tut eh keiner. Das Prinzip der Mengenkonzanz sorgt an seinen eigenen Fingern für mehr Vertrauen.²

2) Ein geradezu unschlagbarer Vorteil ist, dass die Kinder dieses Material ständig zur Verfügung haben. Und „Habe ich zu Hause leider vergessen!“ gibt es auch nicht.

3) Die Finger sind hervorragend sortiert; zwei klar getrennte Fünfergruppen und die Passer (= verliebte Zahlen) zu fünf oder zu zehn bekommt man gleich in Form der eingeklappten Finger „frei Haus“ dazugeliefert.

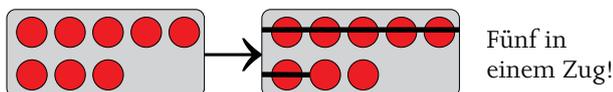
4) Es ist nicht einfach, in Klassen bis 28 Kindern alle seine Mathe-Zwerge im Blick zu haben: Wer zählt ab, wem gelingt die Rechnung spontan? Arbeitet man mit Chips im Zehnerfeld oder mit Rechenschiffchen, ist das sukzessive Hantieren (also ein Chip nach dem anderen) schon aus rein motorischen Gründen gar nicht zu vermeiden. Musste das Kind nun abzählen oder nicht? Schwer zu entscheiden – mit Fingern ein Kinderspiel! Die Lernzielkontrolle funktioniert viel besser – und zwar mit der gesamten Klasse! Und „rumfliegen“ tut dabei auch nichts.

Deshalb können wir auch von Vorschlägen, dass man die Aufgabe $8 - 6 = ?$ am Zehnerfeld folgendermaßen lösen soll, nur dringend abraten:

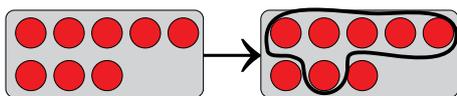


Das fördert unter Garantie nicht nur das zählende Rechnen, sondern auch ein positionales, ordinales Zahlverständnis. Das Zehnerfeld kann hierfür aber gar nichts.

Viel besser ist es so...

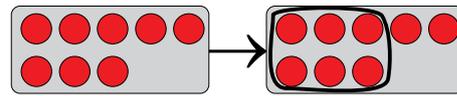


... oder so...



² Es ist uns durchaus klar, dass es Kinder gibt, die der Tatsache, dass eine Hand fünf Finger hat, nicht über den Weg trauen und diese immer wieder von vorne abzählen. Das tun sie aber auch am Zehnerfeld. Es zeigt sich, dass das Anschauungsmaterial erstens nicht das Problem ist und zweitens nicht die Ursache bekämpfen kann.

... oder auch später einmal ohne Fünferstruktur:



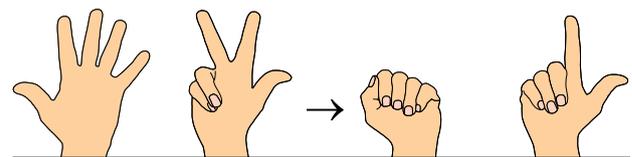
In jedem Fall erleben die Finger als Anschauungsmaterial in manchen Mathe-Werken eine Renaissance. Und das unseres Erachtens völlig zu Recht!

Richtig und falsch mit Fingern rechnen

Was für das Beispiel oben mit den Zehnerfeldern gilt, gilt genauso auch für das Rechnen mit Fingern.

Finger (oder jedwedes andere Material) als Abzählhilfe zu nehmen, ist KEIN Rechnen. „Mein Kind kann schon bis 100 zählen!“, das hört man von Elternseite nicht selten. Man ist geneigt zu antworten: „Machen Sie sich da mal keine Sorgen. Das ist nicht so schlimm!“ Zahlwortreihen aufzusagen und mit Fingern zu kontrollieren, ob man genug hoch- bzw. runtergezählt hat, hat mit Mathe nur wenig zu tun. So lernt das Kind niemals das Rechnen – auch wenn es schon bis tausend zählen kann. Übung schadet da nur und schleift die Zählstrategien erst richtig ein. Und auch Feststellungen wie „Am Anfang zählen sie doch fast alle!“ können wir aus unserer jahrzehntelangen Erfahrung heraus nur entgegnen: „Und am Ende eben auch!“ Man kann sich deshalb gar nicht darüber wundern, dass Zählkinder sich nicht vom Anschauungsmaterial lösen können – wie sollen sie das denn auch?

Mit den Fingern richtig Rechnen lernen heißt: Das Kind benutzt seine Finger kardinal im Sinne des Zahlaufbaus (Kompetenzebene 3 der vorschulischen Zahlbegriffsentwicklung). Das sieht bei $8 - 6 = ?$ so aus:



Und das spontan, in einem Zug – ohne abzählen (mit Varianten auf dem Kernfingerbild – siehe weiter hinten).

Damit das klappt, müssen...

Grundbedingungen

... erfüllt sein.



Das Kind verfügt über den nominalen Aspekt einer Zahl (Kompetenzebene 1 der vorschulischen Zahlbegriffsentwicklung). Es kennt die Zahlwörter und ihre Reihenfolge und kann so im Zahlbereich null bis zehn (minimal!) vorwärts und rückwärts zählen – dies auch ab einer bestimmten Zahl x . Ferner muss es die Zahlssymbole kennen und eine Anzahl von drei Gegenständen (mehr ist NICHT nötig) simultan erfassen können.



Das Kind beherrscht die Kompetenzebene 2 der vorschulischen Zahlbegriffsentwicklung. Es hat ein Mengenbewusstsein von Zahlen entwickelt, versteht Zahlen als Gesamtanzahlen über den inkrementellen Aufbau um eins (beispielsweise als eine aufzusummierende Anzahl von Einsen über das sog. resultative Zählen) und NICHT als einzelne Positionen!



Das Kind hat den Zahlaufbau verstanden (die Kompetenzebene 3 der vorschulischen Zahlbegriffsentwicklung). Es weiß, dass Zahlen aus Zahlen zusammengesetzt sind. Es beherrscht die Kernstrukturen und Kernfingerbilder als Grundlage eines zählfeien Rechnenlernens.

Wie man dies mit Kindern im Anfangsunterricht oder in der KiTa erarbeitet, ist Inhalt des Screening- und Förderkonzepts ILSA 1, das wir für Schulen entwickelt haben.³

Hier geht es jetzt im Weiteren darum, wie man mit den Fingern das Rechnen erlernen kann.

Was sind Kernfingerbilder?

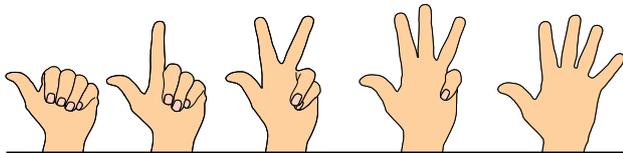
Als Kernfingerbilder bezeichnen wir die Anzahlen von eins bis fünf. Sie werden **IMMER** auf einer Hand repräsentiert. Wenn Sie sie den Kindern zeigen, sieht das Kind **IMMER** Ihre Handinnenflächen, damit es sofort den Passer bis fünf erkennt. Belassen Sie es **UNBEDINGT** dabei, dass Sie diese Anzahlen auf einer Hand zeigen, sonst stimmt der Passer zu fünf nicht mehr!

Hier eine Demonstration, wie es **NICHT** gemacht werden sollte am Beispiel der Anzahl zwei:



NEIN! Die Ergänzung (= Passer) von zwei zu fünf stimmt nicht!

Die folgenden Fingerbilder bezeichnet man als **Kernfingerbilder**. Sie müssen zu **100%** sitzen:

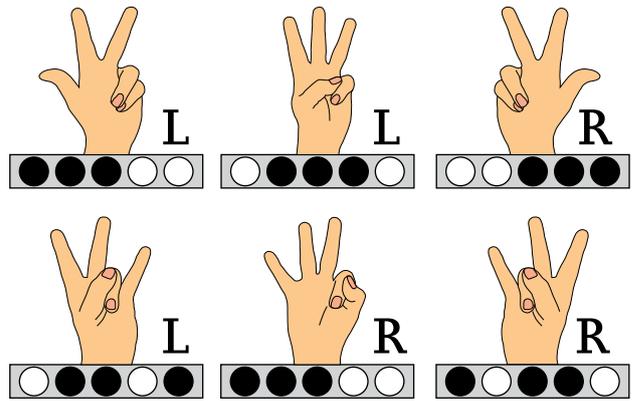


Diese Bilder sollten die Kinder in **allen erdenklichen Variationen** erlernen (mit der linken **und** der rechten Hand) aber immer nur mit **EINER** Hand!⁴ Dabei dürfen Lücken entstehen. Wir zeigen einige beispielhaft an der Anzahl drei am Fünfer-Feld und Kernfingerbild:⁵

³Weitere Informationen unter: www.ILSA-Lernentwicklung.de

⁴ Das gibt (manchmal nicht nur bei Kindern) motorische Probleme. Dazu fällt uns ein: Sie sollen es trainieren, denn was Motorik anbetrifft gibt es nur ein Motto: Übung macht den Meister!

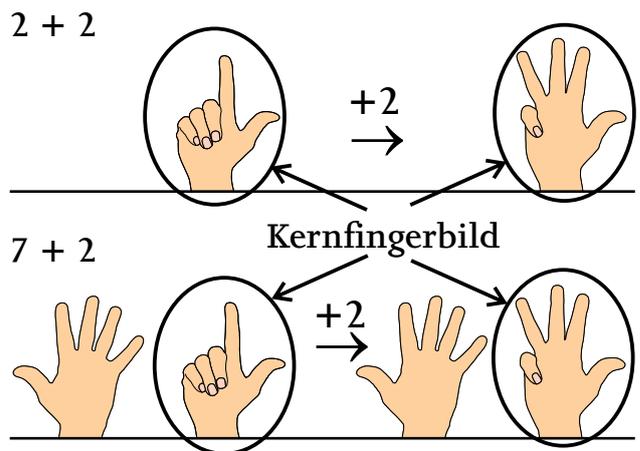
⁵ Entnommen aus: Förderkonzept ILSA 1, ILSA Lernentwicklung



Alles, was Ihre und die Finger der Kinder hergeben, ist nicht nur erlaubt, sondern gewünscht. Die Kinder sollen keine festen Bilder auswendig lernen. Es ist **NICHT** die Reihenfolge, die die Anzahl festlegt!

Diese Kernfingerbilder sind auf der enaktiven Ebene des Lernens entscheidend für die ersten Analogiebildungen im Zahlenraum bis zehn. Sie sind der Schlüssel für die spätere Ablösung vom Anschauungsmaterial.

Warum? Weil auf dem Kernfingerbild zu der Rechnung $2 + 2$ die gleiche Handlung vorgenommen wird, wie bei der Aufgabe $7 + 2$:

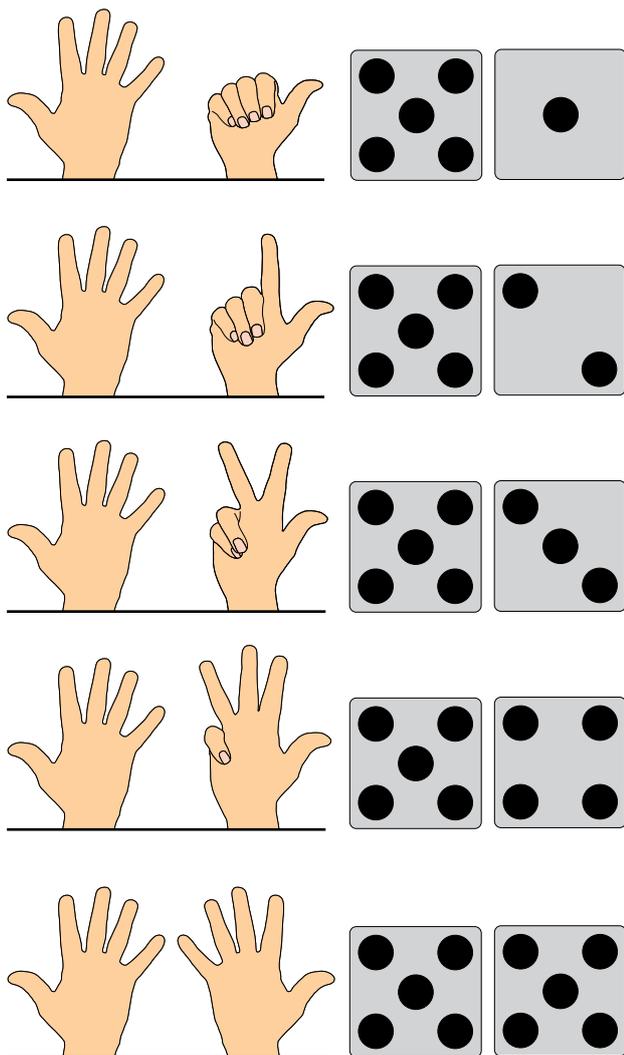


Damit diese Analogiebildungen beim Rechnenlernen „funktionieren“, müssen die Kinder zuvor die Kernstrukturen erlernt haben. Womit die Frage ansteht:

Was sind Kernstrukturen?

Kernstrukturen sind die Fingerbilder von sechs bis zehn. Sie enthalten **immer einen vollen Fünfer!** Kernstrukturen sind zusammengesetzt aus einem vollen Fünfer und einem Kernfingerbild. Sie ermöglichen den Kindern die Quasisimultanerfassung der Anzahlen sechs bis zehn (ohne abzuzählen). Exakt das ist die „Kraft der Fünf“, die völlig zu Recht in den Mittelpunkt des Zahlaufbaus gestellt wird. Die entsprechenden Darstellungen mit Fingerbildern sollten Sie **NIEMALS** einführen, wenn die Kernfingerbilder in all ihren Variationen beim Kind nicht abgesichert sind.

Die Kernstrukturen sehen entsprechend so aus (als Fingerbild und alternativ mit Würfelbildern):⁶



Man sieht gleich: Die Würfelbilder sind etwas schwieriger als die Kernstrukturen, die durch die Fingerbilder dargestellt werden. Grund dafür ist, dass die Kinder auf den Würfelbildern nicht den Passer zur Anzahl zehn sehen. Warten Sie also mit alternativen Darstellungen auf der ikonischen Ebene so lange, bis die Kinder auf der enaktiven Ebene die Fingerbilder als Kernstrukturen beherrschen.

Denken Sie immer an die „Kraft der Fünf“! Der Fünfer ist IMMER voll. Stellen Sie die Anzahl sieben **nicht** so dar:



Das unterstellt, dass das Kind bereits rechnen kann, dass es weiß, dass $4 + 3$ die Anzahl sieben ergibt. Ferner sieht es nicht den Passer zur Anzahl zehn. Sie zäumen gewissermaßen das Pferd von hinten auf: Grundsätzlicher Zahlaufbau noch nicht verstanden, aber schon rechnen können – **das geht nicht!**

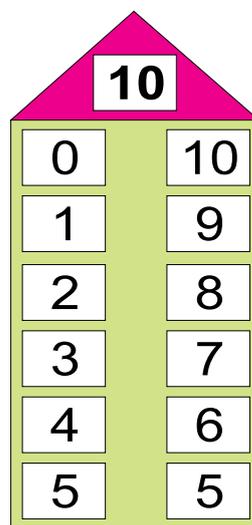
⁶ Entnommen aus: Förderkonzept ILSA 1, ILSA Lernentwicklung

„Wir üben nochmal Zahlzerlegungen!“

Warum eigentlich? Nicht, dass dies grundsätzlich „falsch“ ist – man kann das schon machen. Aber man sollte sich als Lehrkraft auch Rechenschaft darüber ablegen, was der Sinn dieser Übungen sein soll.

Anvisiert ist das Ziel, dass das Kind mit Hilfe dieser Zerlegungen das Rechnen erlernt – nichts dagegen. Aber funktioniert das überhaupt? Diejenigen Kinder, die diese Zerlegungsaufgaben „mit links“ beherrschen, können in aller Regel bereits rechnen. Für sie sind entsprechende Übungen eher eine Art „Beschäftigungstherapie“.

Die Kinder, die Probleme beim Erlernen des Rechnens haben, bleiben in aller Regel – obwohl sie Zahlenpaare teils auswendig können – bei Zählstrategien. Warum? Schaut man sich entsprechende Übungen in Mathe-Büchern an, wird schnell klar, weshalb man da als Lehrkraft „manchmal vor die Wand läuft“ – und das „nervt“ nicht nur, sondern ist auch ziemlich unbefriedigend.



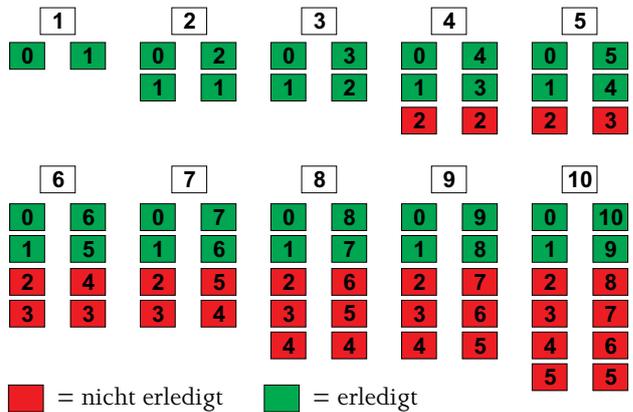
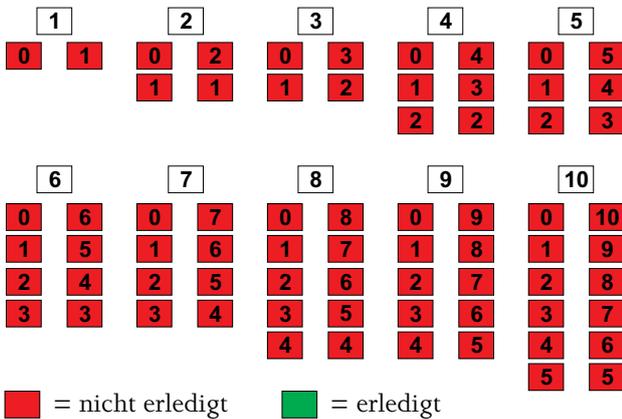
Zählkinder entdecken bei solchen Übungen ziemlich schnell, dass die linke Zahlenreihe jeweils um eins wächst und die rechte entsprechend fällt. Fehlt dazu die enaktive Ebene und sitzt nicht ständig ein Erwachsener nebenan, der das Kind bei seinen schematischen Zählakten stoppt, ist die ganze Übung für die Katz. Beachten Sie ferner: Zählkinder suchen förmlich nach Zahlenreihen, weil es ihre Profession ist. Da kennen sie sich aus!

Unsere Erfahrungen zeigen: Führt man Rechenaufgaben im Zahlenraum bis zehn auf enaktiver Ebene mit Kernfingerbildern und Kernstrukturen ein, erweisen sich die ständigen Übungen von Zahlzerlegungen als überflüssig. Warum und wie geht das?

Rechenaufgaben im Bereich bis zehn

Im folgenden unterstellen wir, dass mit den Kindern das Teil-Teil-Ganze-Konzept erarbeitet wurde (Kompetenzebene 3 der vorschulischen Zahlbegriffsentwicklung). Damit sind auch alle Grundlagen für die Tauschaufgaben gelegt. Ferner muss die Zahl null als Anzahl der leeren Menge eingeführt sein.

Wir stellen das Rechnen mit Kernfingerbildern und Kernstrukturen am Beispiel der Addition dar (die Subtraktion erfolgt völlig analog). In folgender Tabelle sind alle Zerlegungen im Zahlbereich bis zehn dargestellt (die Kinder sehen diese Tabelle **nicht!**).



Zur Verdeutlichung nehmen wir eine Verknüpfungstafel⁷ hinzu (diese sehen die auch Kinder nicht!):

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Aufgaben insgesamt
0											64
1											
2				5							
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											

Inklusive der Tauschaufgaben gibt es im Zahlbereich bis zehn 64 Additionen. Die ersten beiden Sorten, nämlich die Addition der Zahl null und die Addition der Zahl eins führen in aller Regel nicht zu Problemen.

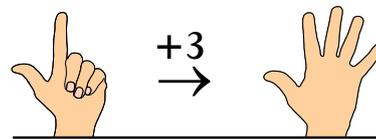
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Aufgaben insgesamt
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	64
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	2	3									Rest 28
3	3	4									
4	4	5									
5	5	6									
6	6	7									
7	7	8									
8	8	9									
9	9										

Voraussetzung:
Die Zahl null ist eingeführt sowie die Vorgänger- und Nachfolger-Probleme werden bewältigt! (Kompetenzebene 2, Mengenbewusstsein von Zahlen)

Damit sind schon über die Hälfte der Aufgaben vom Tisch. Und auch bei den entsprechenden Zerlegungen sieht es schon deutlich besser aus:

⁷ Entnommen aus: Förderkonzept ILSA 1, ILSA Lernentwicklung

Die nächste Abteilung von Aufgaben wird mit Kernfingerbildern gelöst. Das bedeutet: **Ausgangs- und Endpunkt** auf der enaktiven Ebene ist jeweils ein **Kernfingerbild**. Das sind die Additionen $2 + 2$, $3 + 2$ und die zugehörige Tauschaufgabe $2 + 3$. Wir demonstrieren es an der Aufgabe $2 + 3$. Die Handlung des Kindes muss dabei spontan erfolgen (= nicht zählend).



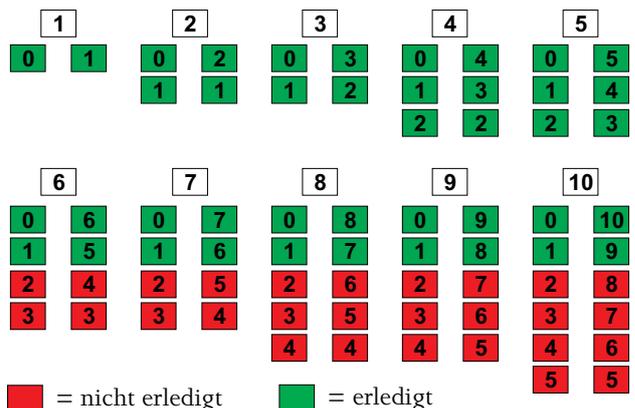
Klappt das nicht, sind die Kernfingerbilder beim Kind nicht installiert. **Sie müssen zurück. Keine weiteren Rechenaufgaben und keine Übung kann hier helfen!**

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Aufgaben insgesamt
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	64
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	2	3	4	5							Rest 25
3	3	4	5								
4	4	5									
5	5	6									
6	6	7									
7	7	8									
8	8	9									
9	9	10									

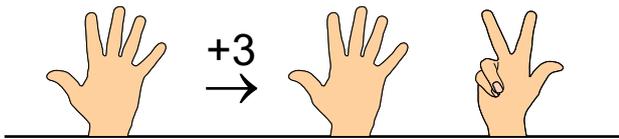
ACHTUNG: Die negativen Fingerbilder müssen beherrscht werden!⁷

Das sind drei! Passer zu fünf.

Damit sind alle Zerlegungen der Zahlen von eins bis fünf abgeschlossen.



Die nächste Abteilung von Aufgaben basiert auf reinen Kernstrukturen. Die **Handlung** des Kindes erfolgt mit **den Kernfingerbildern**. Der **Endpunkt** ist eine **Kernstruktur** Hier am Beispiel der Aufgabe $5 + 3$:



Klappt es nicht spontan (= nicht zählend), so kontrollieren Sie die Kernstrukturen und ggf. die Kernfingerbilder.

Die Verknüpfungstafel füllt sich weiter. Jetzt gibt es noch einen Rest von 18 Aufgaben (Tauschaufgaben inklusive):

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Aufgaben insgesamt
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	64
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	2	3	4	5		7					
3	3	4	5			8					
4	4	5				9					
5	5	6	7	8	9	10					
6	6	7									
7	7	8									
8	8	9									
9	9	10									

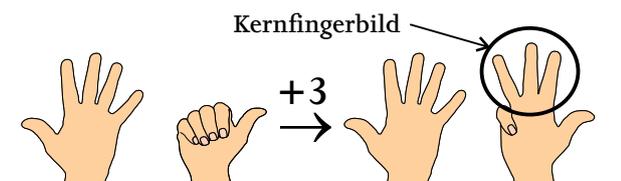
Rest 18

Bei den Zahlzerlegungen sieht es nun so aus:

	1	2	3	4	5
0	1	0 2	0 3	0 4	0 5
1		1 1	1 2	1 3	1 4
2			2 2	2 3	
3					
	6	7	8	9	10
0	6	0 7	0 8	0 9	0 10
1	5	1 6	1 7	1 8	1 9
2	4	2 5	2 6	2 7	2 8
3	3	3 4	3 5	3 6	3 7
			4 4	4 5	4 6
				5 5	5 5

■ = erledigt ■ = nicht erledigt

Die nächste Abteilung an Additionen dezimiert die Anzahl der offenen Zerlegungen erheblich. Wir beginnen mit den Aufgaben $6 + 2$, $6 + 3$, $6 + 4$, $7 + 2$, $7 + 3$ und $8 + 2$. Als Beispiel wählen wir die Aufgabe $6 + 3$:

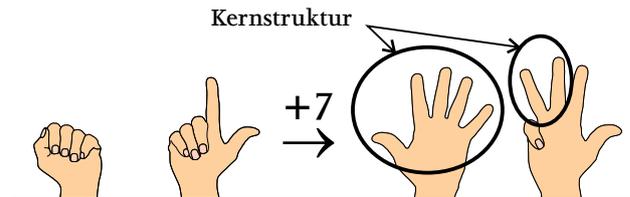


Ausgangs- und Endpunkt auf der enaktiven Ebene ist jeweils eine **Kernstruktur**. **Hinzugeklappt** wird das **Kernfingerbild** von drei. Hier wird deutlich, wie wichtig es

ist, die Kernfingerbilder vorher mit allen Varianten eingeführt zu haben. Zählt das Kind die Aufgabe, müssen Sie diese Varianten kontrollieren (siehe vorher am Beispiel 3).

Wir wenden uns nun den zugehörigen Tauschaufgaben zu. Das sind die Aufgaben $2 + 6$, $2 + 7$, $2 + 8$, $3 + 6$, $3 + 7$ und die Aufgabe $4 + 6$. Es ist sehr wichtig, dass die Kinder auch diese Aufgaben auf enaktiver Ebene nicht-zählend lösen können. Also **nicht** mit dem Tipp anrücken: „Nimm doch einfach die Tauschaufgabe!“

Als Beispielaufgabe haben wir $2 + 7$ ausgewählt:



Ausgangspunkt ist das **Kernfingerbild** von zwei. **Adiert** wird die **Kernstruktur** sieben (als fünf und zwei). **Endpunkt** ist dann die **Kernstruktur** von neun.

Die Verknüpfungstafel weist jetzt nur noch ganz wenige Lücken auf, sechs Aufgaben sind übrig geblieben. Wenn man die Tauschaufgaben herausnimmt, sind es nur vier.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Aufgaben insgesamt
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	64
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	2	3	4	5		7	8	9	10		
3	3	4	5			8	9	10			
4	4	5				9	10				
5	5	6	7	8	9	10					
6	6	7	8	9	10						
7	7	8	9	10							
8	8	9	10								
9	9	10									

Rest 6

Auch bei den Zahlzerlegungen hat sich einiges getan:

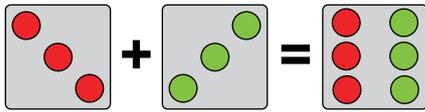
	1	2	3	4	5
0	1	0 2	0 3	0 4	0 5
1		1 1	1 2	1 3	1 4
2			2 2	2 3	
3					
	6	7	8	9	10
0	6	0 7	0 8	0 9	0 10
1	5	1 6	1 7	1 8	1 9
2	4	2 5	2 6	2 7	2 8
3	3	3 4	3 5	3 6	3 7
			4 4	4 5	4 6
				5 5	5 5

■ = nicht erledigt ■ = erledigt

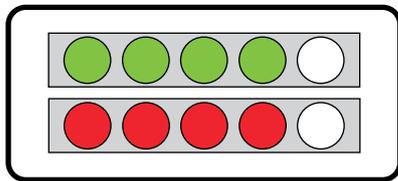
Wir wenden uns nun den „Sorgenkindern“ im Zahlbereich bis zehn zu. Das sind die Dopplungen 3 + 3 und 4 + 4 sowie die Additionen 4 + 2 und 4 + 3 und deren Tauschaufgaben. **Diese sind nicht in einem Zug mit Kernfingerbildern und Kernstrukturen zu bewältigen.** Wir beginnen mit den Dopplungen.

Unsere Empfehlung lautet hier: Arbeiten Sie mit Würfelbildern und Zehnerfeldern (vorausgesetzt, Sie haben diese bei den Kindern erfolgreich eingeführt).

Wir beginnen mit der Dopplung 3 + 3. Diese kann man perfekt am Würfelbild demonstrieren und einführen:



Gleiches gilt für die Dopplung 4 + 4. Hier eignet sich das Zehnerfeld am besten:



Und damit bleibt als „Problemzone“ dieser Rest übrig:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Aufgaben insgesamt 64	
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		Rest 4
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
3	3	4	5	6	7	8	9	10				
4	4	5	6	7	8	9	10					
5	5	6	7	8	9	10						
6	6	7	8	9	10							
7	7	8	9	10								
8	8	9	10									
9	9	10										

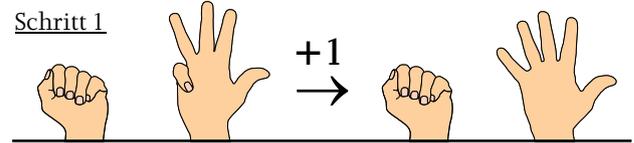
Als Zahlzerlegungen betrachtet genau zwei Aufgaben:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	0 10
	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9
		2 2	2 3	2 4	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8
			3 3	3 4	3 3	3 4	3 5	3 6	3 7
				4 4	4 4	4 5	4 6	4 7	4 8
					5 5	5 6	5 7	5 8	5 9
						6 6	6 7	6 8	6 9
							7 7	7 8	7 9
								8 8	8 9
									9 9

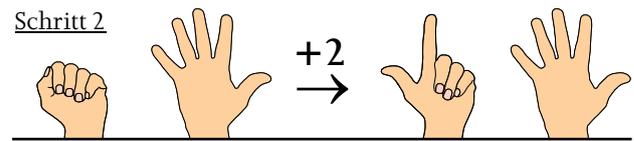
■ = nicht erledigt ■ = erledigt

Und das ist dann eine echte Alternative zu den immer wiederkehrenden Übungen zu Zahlzerlegungen, die zum Rechnenlernen führen sollen. Beherrscht das Kind das vorher ausgeführte auf enaktiver Ebene, erkennt es äquivalente Darstellungen auf ikonischer Ebene und hat es eine Verbindung zur symbolischen Ebene hergestellt, **DANN KANN ES RECHNEN!**

An der Aufgabe 4 + 3 zeigen wir, wie es geht:



Ausgangs- und Endpunkt ist ein Kernfingerbild.



Ausgangspunkt ist ein Kernfingerbild. Addiert wird ein Kernfingerbild und Endpunkt ist eine Kernstruktur.

Sicher, da hören wir so manchen Referendar oder Seminarleiter protestieren: „Das ist ja der altmodische Fünfer-Übergang!“ Stimmt – das ist er, und zwar haarscharf! Aber erstens berücksichtigt er die „Kraft der Fünf“ und zweitens muss ja nicht alles schlecht sein, was „altmodisch“ ist. Es ist auch ziemlich „altmodisch“, dass 5 + 3 die Anzahl acht ergibt – richtig ist es trotzdem.

Und damit sind alle Zahlzerlegungen erledigt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	0 10
	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9
		2 2	2 3	2 4	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8
			3 3	3 4	3 3	3 4	3 5	3 6	3 7
				4 4	4 4	4 5	4 6	4 7	4 8
					5 5	5 6	5 7	5 8	5 9
						6 6	6 7	6 8	6 9
							7 7	7 8	7 9
								8 8	8 9
									9 9

■ = nicht erledigt ■ = erledigt

Und rechnen hat das Kind obendrein gelernt! Genau jetzt, wenn die Kinder dies beherrschen, heißt es dann völlig zu Recht:

Übe fleißig weiter!

Denn das **verständlich** Gelernte **MUSS** automatisiert werden. Übung macht nun einmal **nur dann** den Meister, wenn der Lerninhalt **vorher** sitzt.

UMGEKEHRT GILT DAS NIE!

Und mit Fingern geht noch viel mehr!

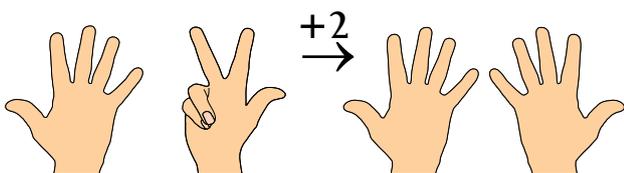
Wolfgang Hoffmann,
Mathematisch Lerntherapeutisches Zentrum Dortmund, Bochum, Lüdenscheid

Kerstin Schuckmann, Klaus Dieter Stemler, Christian Bussebaum,
ILSA-Lernentwicklung Bochum

Klar, das was im Folgenden dargestellt wird, funktioniert auch an Zehner- und Zwanziger-Feldern. Aber der historische Ursprung liegt tatsächlich in den Fingerbildern.¹ Russische und andere „Rechenmaschinen“ funktionieren so und der Grund dafür ist die „Kraft der Fünf“.

Zehnerübergänge – leichter gemacht!

Nun ja, das Leid mit den Zehnerübergängen dürfte jede Lehrkraft kennen. Bei der Rechnung $8 + 6 = ?$ gelingt oft der erste Rechenschritt (hier dargestellt an den Fingern):



Vorausgesetzt, das Kind beherrscht negative Fingerbilder (Ergänzung = Passer zu zehn, sog. „verliebte Zahlen“), ...



Das sind zwei!
Passer zur Zehn.

... klappt zwar die Ergänzung, aber es verliert sich häufig die „Spur“ zur ursprünglichen Aufgabe $8 + 6$ (jedenfalls, wenn das Kind die Aufgabe im Kopf rechnen soll, sie also auf symbolischer Ebene nicht sieht): „Was soll ich gleich noch mal rechnen...?“

Verwenden Sie zur **Einführung des zehnerüberschreitenden Rechnens** zunächst nur Aufgaben (in diesem Artikel als Beispiel nur Additionen, bei Subtraktionen erfolgt dies analog), in denen bei der Zehnerüberschreitung der zweite Summand leicht in Kernfingerbildern aus der Kernstruktur heraus zerlegt werden kann. Dabei soll das Kind **nicht** den ersten Summanden mit seinen Fingern enaktiv darstellen, sondern die zu addierende Zahl (also den zweiten Summanden).



Schritt für Schritt zum Zehnerübergang

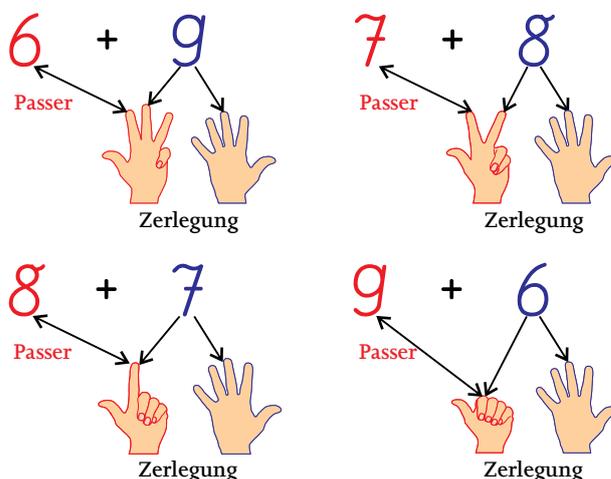
Nehmen Sie bei der Einführung folgende Aufgaben:

$$\begin{array}{cc} 6 & + & 9 & & 7 & + & 8 \\ \text{1. Summand} & & \text{2. Summand} & & \text{1. Summand} & & \text{2. Summand} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 8 & + & 7 & & 9 & + & 6 \\ \text{1. Summand} & & \text{2. Summand} & & \text{1. Summand} & & \text{2. Summand} \end{array}$$

Erster und zweiter Summand bestehen jeweils aus einer Kernstruktur.

Dummerweise hat man aber nur zehn Finger – also was tun? Sind die Fingerbilder am Ende? Nein, denn bei diesen ersten vier Einführungsaufgaben lässt sich der zweite Summand exakt in die Kernfingerbilder aus der Kernstruktur zerlegen, um die Anzahl zehn aufzufüllen. Übrig bleibt dann immer der volle Fünfer:



Auf rein symbolischer Ebene kennt man das aus Mathe-Büchern (auch ikonisch), aber seltener auf enaktiver Ebene. Die symbolische Ebene sieht dort meist so aus:

$$\begin{array}{cc} 6 & + & 9 & & 7 & + & 8 \\ & & \swarrow \searrow & & \swarrow \searrow & & \\ & & 4 & 5 & & & 3 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 8 & + & 7 & & 9 & + & 6 \\ & & \swarrow \searrow & & \swarrow \searrow & & \\ & & 2 & 5 & & & 1 & 5 \end{array}$$

Diese rein symbolische Darstellung mag für einige Kinder ausreichen. In jedem Fall kommt bei diesen Darstellungen und Übungen die enaktive Ebene viel zu kurz und das Problem „Was soll ich gleich noch mal rechnen...?“ ist damit auch nicht aus der Welt.

¹ vgl. Georges Ifrah: „Universalgeschichte der Zahlen“, Campus Verlag Frankfurt/M. 1996 – sehr lehrreich, spannend und empfehlenswert!

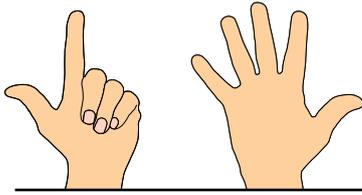
Wie man das lösen kann, zeigen wir Ihnen anhand $8 + 7$. Denken Sie bitte daran: Alle Voraussetzungen im vorherigen Artikel müssen gegeben sein – sonst klappt das nie!

Das Kind zeigt auf der enaktiven Ebene NICHT mit seinen Fingern den ersten Summanden, sondern den zweiten:

Rechnung:

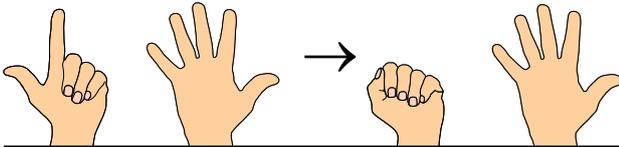
$$8 + 7$$

Das Kind darf die Rechnung nicht sehen! Es soll im Kopf rechnen lernen. Es zeigt nun das Kernfingerbild der Anzahl sieben (also den zweiten Summanden):



Es muss nun spontan (= nicht zählend) das Kernfingerbild der Anzahl zwei als Passer zur Anzahl zehn wissen. Das ist Grundvoraussetzung: Die sog. „verliebten Zahlen“ müssen verständlich auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene präsent sein – kontrollieren Sie das, **BEVOR** Sie mit Zehnerüberschreitungen beginnen!²

Das Kind sagt: „... plus zwei sind zehn!“ und klappt an seiner Kernstruktur das Kernfingerbild der Anzahl zwei ein:



Damit ist der erste Rechenschritt beim zehnerüberschreitenden Rechnen erledigt – der Passer.

Nun macht sich der Vorteil, dass man mit dem zweiten Summanden auf enaktiver Ebene agiert, deutlich bemerkbar. Das Kind braucht die ursprüngliche Aufgabe nicht mehr im Kopf zu behalten, weil es am Kernfingerbild der Anzahl fünf sofort erkennt, wie der zweite Rechenschritt aussehen muss:

$$10 + 5$$

Dieses Verfahren minimiert Merkleistungen im Bereich des Kurzzeitgedächtnisses erheblich!³

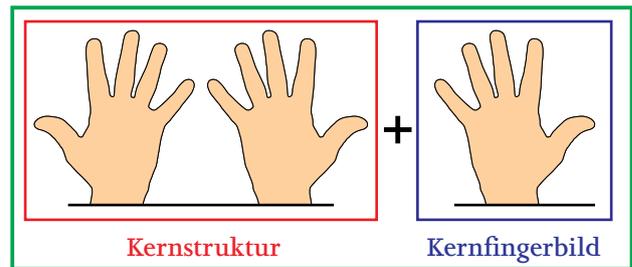
² Weitere Informationen unter: www.ILSA-Lernentwicklung.de

³ „Aus der Beobachtung von Lernprozessen ist bekannt, dass das Gehirn dem Prinzip folgt, möglichst wenig Verarbeitungsaufwand zu investieren.“ (Lorenz/Radatz: Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht, Hannover 1993, S. 117).

Diese Erkenntnis dürfte wohl kaum jemandem fremd sein: Die Neuropsychologie weiß das schon lange und Sie werden bei einer zu verrichtenden Arbeit garantiert auch nicht den beschwerlichsten Weg nehmen – wenn Sie denn wissen, **wie und warum!**

Die Vorgehensweise, den zweiten Summanden enaktiv zu benutzen, hat zudem einen zweiten entscheidenden Vorteil: Vorausgesetzt, das Kind hat den Aufbau der Zahlen von 10 bis 19 verstanden, muss es beim zweiten Rechenschritt ($10 + 5$) gar nicht mehr rechnen – auch das ökonomisiert den Gedankenaufwand erheblich.

Warum? Wenn das Kind weiß, dass die Zahlen von 10 bis 19 wieder aus Kernstrukturen bestehen, dann gilt dasselbe wie für die „Kraft der Fünf“. Sie wird ergänzt durch die „Kraft der Zehn“ – das Prinzip bleibt das gleiche (auch bei der Quasisimultanerfassung):



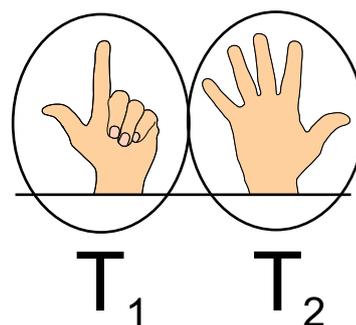
Oder auf der symbolischen Ebene:

$$\begin{array}{cc} \text{Z} & \text{E} \\ 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \text{Z} & \text{E} \\ 1 & \square \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \text{Z} & \text{E} \\ 1 & 5 \end{array}$$

Die Ziffer 0 wird auf der Einerstelle durch die Ziffer 5 ersetzt. Rechnen muss man da gar nichts! Das Stellenwertsystem „ersetzt den Rechenakt“!

Ein Risikofaktor, der zu erheblichen Problemen beim Erlernen des Rechnens führt, liegt im Unverständnis des Zehnersystems. Anders gesagt: Rechenschwierigkeiten sind zumeist Zahlaufbauprobleme und kein Mangel an Übung! Analogiebildungen sind in Mathe nun mal alles! Und das gilt im Zahlbereich bis 5, 10, 20 und später auch bis 100 und 1.000 sowie auch bei Dezimalbrüchen.

Das Verfahren, den zweiten Summanden enaktiv darzustellen und gemäß der Zehnerüberschreitung zu zerlegen, unterstellt den sicheren Umgang mit Passeraufgaben im Zahlbereich bis zehn (Teilmenge 1: T_1) und liefert dem Kind ohne weitere Rechnung sofort das Ergebnis auf der Einer-Stelle (Teilmenge 2: T_2). In unserem Beispiel:

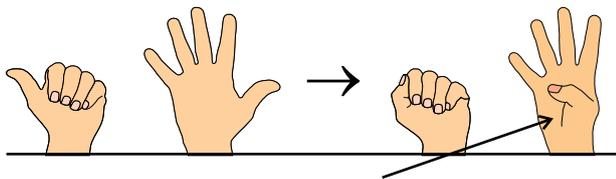


Beim Zehnerübergang mit Hilfe dieser Vorgehensweise, sollte man sich zunächst auf die vorgenannten Aufgaben ($6 + 9, 7 + 8, 8 + 7$ und $9 + 6$) beschränken, da die Zerlegung über die reine Kernstruktur vonstatten geht ($T_1 =$ eine Hand, $T_2 =$ zweite Hand). Das Kind kann sich dann rein auf den Zehnerübergang selbst konzentrieren.

Bei den anderen zehnerüberschreitenden Aufgaben funktioniert es identisch. Wir zeigen es an der Rechnung:

$$8 + 6$$

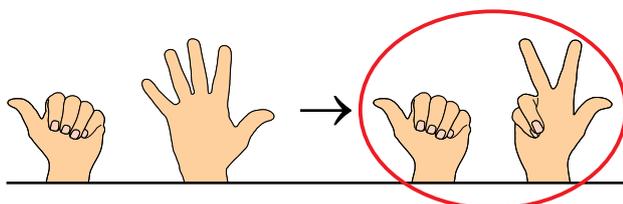
Dargestellt wird der zweite Summand. Im ersten Rechenschritt wird der Passer zu zehn eingeklappt. Das kann dann auch so aussehen:



Variante des Kernfingerbildes von vier

Das Ergebnis auf der Einerstelle ist als Kernfingerbild sofort erkennbar!

So sollte man es hingegen besser NICHT machen:



Kein Kernfingerbild von Vier!

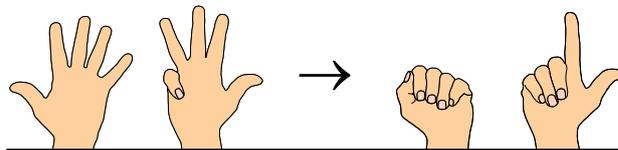
Das Kind muss sich hier den zusätzlichen Gedanken leisten, dass $3 + 1$ die Anzahl vier ergibt. Bei einem Kernfingerbild ist das – wenn diese beim Kind verständlich verinnerlicht sind – nicht nötig.

Wir nehmen ein weiteres Beispiel, die Rechnung:

$$3 + 9$$

Hier lautet der elterliche Ratschlag ganz oft: „Rechne das doch einfach umgekehrt!“ Einmal abgesehen davon, dass das mit dem „umgekehrt“ nicht stimmt, sollte das Thema Rechenerleichterungen nachrangig erfolgen und nicht bereits dann, wenn das Kind gerade erst dabei ist, Einblicke in den Aufbau des Zehnersystems zu gewinnen. Immer „alles auf einmal“ mit x -verschiedenen Rechenwegen besprechen zu wollen, verwirrt die meisten Kinder mehr als es ihnen hilft – das gilt insbesondere für lernschwache Kinder.

Dieses Verfahren hat **nichts** mit einer schematischen Vorgehensweise zu tun. Wir rechnen nun einmal im Zehnersystem – daran gibt es nichts zu rütteln! Lassen Sie die Kinder die Aufgabe, wie beschrieben, auf enaktiver Ebene lösen: Das Kind zeigt den zweiten Summanden. Eingeklappt wird der Passer zu zehn als Kernstruktur der Anzahl sieben (also fünf und zwei – siehe vorherigen Artikel).



Und wieder bleibt das Ergebnis der Einerstelle als Kernfingerbild an einer Hand stehen und kann vom Kind direkt und ohne weiteren Rechenaufwand erkannt werden.

Und damit ist man das Problem „Wie war noch gleich mal die Aufgabe...?“ weitestgehend los. Nochmals: Verwechseln Sie diese Vorgehensweise nicht mit einem „Trick“. Wir halten uns strikt an das Zehnersystem – und das ist kein „Trick“, sondern der Zahlaufbau selbst!

Wir denken, der Zusammenhang zum vorherigen Artikel wird deutlich: Ständig stolpert man beim Rechnen über Kernfingerbilder und Kernstrukturen. Deshalb müssen diese beim Rechnen im Zahlbereich bis zehn **VORHER** klar sein, sonst können Sie den Zehnerübergang vergessen. Anders gesagt (weil wir es schon so oft erlebt haben): Mit Zählkindern das zehnerüberschreitende Rechnen zu üben ist, gelinde gesagt, aufreibend – und sinnlos.

In der zweiten Klasse, wenn der Zahlbereich bis 100 erweitert wird, erkennen die Kinder keinerlei Analogien mehr. Das gibt dann jede Menge Rechenprobleme und noch mehr Förderbedarf und die Ziele des Curriculums rücken in weite Ferne. Man muss sich dann auch nicht wundern, wenn Eltern mit den schriftlichen Rechenverfahren anrücken („Ich zeig dir mal nen Trick!“), weil der eigene Sprössling bei Aufgaben wie $38 + 27$ mit dem Zählen nicht mehr hinterherkommt. Die weiteren Konsequenzen beim Erlernen des Rechnens ersparen wir uns an dieser Stelle – jede Lehrkraft kennt sie.

Neben der nun fälligen Automatisierungsphase (vorausgesetzt, das Kind beherrscht den Zehnerübergang spontan und nicht-zählend), sollte man als **Lernzielkontrolle** äquivalente Darstellungsformen wählen, um nachzuschauen, ob das Kind selbständig den eingeschlagenen Rechenweg an jedem beliebigen Material nachvollziehen kann. Dazu eignet sich der „Abaco 20“ recht gut:

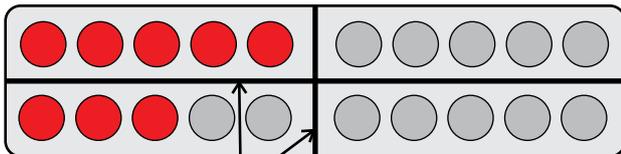


Abaco 20 von Schubi Lernmedien

Man kann dies perfekt mit den Fingerbildern verknüpfen. Wir zeigen Ihnen ein Beispiel: Jeweils drei Kinder arbeiten zusammen. Das eine Kind hat den Abaco, das zweite arbeitet (wie vorher dargestellt) mit seinen Fingern und das dritte Kind übernimmt die symbolische Ebene. Wir nehmen die Rechnung $8 + 7$, das dritte Kind schreibt sie auf:

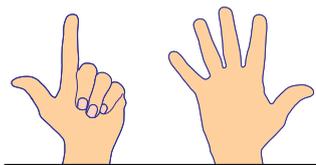
$$8 + 7 =$$

Das „Abaco-Kind“ stellt (nicht-zählend, das geht mit diesem Material im Gegensatz zu Chips recht gut) den **ersten** Summanden dar:

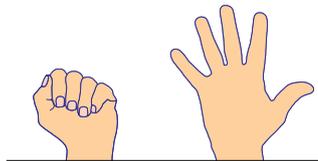


Kleiner Tipp:
Zeichnen Sie die 5er-Strukturen mit einem Permanent-Stift nach!

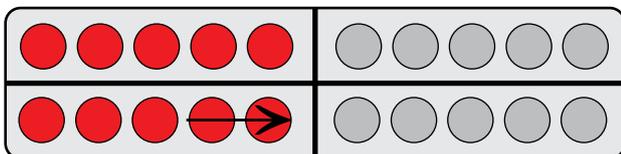
Das „Finger-Kind“ zeigt den zweiten Summanden:



Es rechnet jetzt: „...plus zwei sind zehn!“ und klappt das Kernfingerbild von zwei ein:



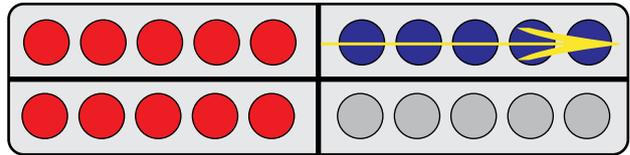
Gleichzeitig deckt das „Abaco-Kind“ zwei weitere rote Kugeln auf (in einem Zug!):



Das „Symbol-Kind“ notiert den ersten Schritt:

$$8 + 7 = 8 + 2$$

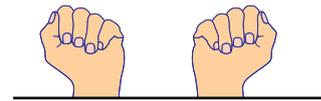
Das „Abaco-Kind“ schaut nun auf die Fünfer-Hand des Nachbarn und rechnet weiter: „...plus fünf sind fünfzehn!“ und deckt in einem Zug fünf blaue Punkte auf:



Das „Symbol-Kind“ notiert weiter:

$$8 + 7 = 8 + 2 + 5 = 15$$

Und das „Finger-Kind“ klappt die Fünfer-Hand ein:



Geschafft: Der zweite Summand wurde komplett addiert (bei zehnerunterschreitender Subtraktion funktioniert dies analog). Nebenbei: Diese Übertragung des Gelernten auf verschiedene äquivalente Darstellungsformen ist ein durchgängiges Prinzip des Förder- und Screeningkonzepts ILSA. Es hat hier folgende Vorteile:

- 1) Sie schaffen eine bruchfreie Verbindung zwischen der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene.
- 2) Sie verwenden zusätzliches Anschauungsmaterial NICHT dann, wenn das Kind es nicht verstanden hat! Denken Sie daran: Das Anschauungsmaterial ist nicht der Grund für Rechenprobleme! Das zusätzliche Material dient zum Training und zur Lernzielkontrolle. Erkennt ein Kind den Rechenweg an jedwedem Anschauungsmaterial, dann hat es die Sache verstanden!
- 3) Mit der Darstellung am Zwanziger-Feld erhalten die Kinder einen Überblick über die Gesamtmenge. Und nicht nur das: Sie sehen auch unmittelbar die neue Kernstruktur, nämlich die 15 als Zusammensetzung aus zehn und fünf – erste Lernschritte in das Zehnersystem! Zudem schaffen Sie so die Verbindung zu gängigen Darstellungen in den Schulbüchern.

Beherrscht das Kind dies und haben Sie genügend geübt, ist der Zeitpunkt für alternative Strategien gekommen – wenn das Kind nicht bereits selbst drauf gekommen ist, was gar nicht selten der Fall ist. Rechenerleichterungen sind jetzt das Thema, beispielsweise Dopplungen etc.

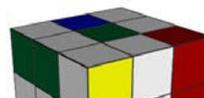
Vor den Zehner- und Hunderterübergängen in erweiterten Zahlbereichen muss sich dann keiner mehr fürchten: Sie nicht und das Kind auch nicht, da das Grundprinzip klar ist. Mit diesen Kenntnissen über unser Dezimalsystem im Gepäck macht es dann durchaus Sinn, zu sagen:

Über fleißig weiter!



30175	Hannover Leonhardtstr. 2 Therapie-Zentrum Rechenschwäche Dyskalkulie	Tel.: 0511 - 318 08 23 Fax: - 336 49 88	E-Mail: info@rechenschwaeche-hannover.de Internet: www.rechenschwaeche-hannover.de
33102	Paderborn Friedrich-Ebert-Str. 8a Zentrum für mathematisches Lernen	Tel.: 05251 - 205 09 74	E-Mail: info@rechentherapie-paderborn.de Internet: www.rechentherapie-paderborn.de
34131	Kassel Wilhelmsh. Allee 287 Zentrum für mathematisches Lernen	Tel.: 0561 - 316 05 60 Fax: - 314 94 41	E-Mail: info@rechenschwaeche-kassel.de Internet: www.rechenschwaeche-kassel.de
38100	Braunschweig Steinweg 4 Institut für Mathematisches Lernen	Tel.: 0531 - 121 677 50 Fax: - 121 677 59	E-Mail: info@iml-braunschweig.de Internet: www.zahlbegriff.de
40211	Düsseldorf Kurfürstenstr. 8 Mathematisch-Lerntherapeutisches Institut	Tel.: 0211 - 171 06 67 Fax: - 171 06 68	E-Mail: mli@rechenschwaeche.org Internet: www.mli-duesseldorf.de
44135	Dortmund Kaiserstr. 5a Mathematisch Lerntherapeutisches Zentrum	Tel.: 0231 - 83 900 49 Fax: - 83 902 49	E-Mail: mlz-dortmund@t-online.de Internet: www.mlz-dortmund.de Filialen: Bochum Lüdenscheid
49074	Osnabrück Kollegienwall 28 a/b Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen	Tel.: 0541 - 205 22 42 Fax: - 205 22 44	E-Mail: os-zentrum@t-online.de Internet: www.os-rechenschwaeche.de Filialen: Herford Münster Rheine Diepholz
50668	Köln Neustadt Nord Theodor-Heuss-Ring 52 Lerntherapeutisches Zentrum Rechenschwäche	Tel.: 0221 - 912 34 50 Fax: - 912 34 52	E-Mail: dys@lzt-koeln.de Internet: www.lzt-koeln.de Filialen: Köln-Rodenkirchen Eschweiler
53111	Bonn Nordstr. 75 Zentrum für Dyskalkulietherapie Bonn	Tel.: 0228 - 976 66 00 Fax: - 976 66 02	E-Mail: dys@zdb-bonn.de Internet: www.zdb-bonn.de
57072	Siegen Löhrstr. 15 Zentrum für mathematisches Lernen	Tel.: 0271 - 703 05 700	E-Mail: info@rechenschwaeche-siegen.de Internet: www.rechenschwaeche-siegen.de

Mathematisches Institut
 zur Behandlung der Rechenschwäche/Dyskalkulie



80333	München Brienner Str. 48	Tel.: 089 - 523 31 42 Fax: - 523 42 83	Service-Tel.: 0180 - 300 16 99 (9 ct/min) E-Mail: institut@rechenschwaeche.de Internet: www.rechenschwaeche.de
--------------	------------------------------------	---	---

81245 München-Aubing	81479 München-Solln	82008 Unterhaching	85551 Kirchheim-Heimstetten
85716 Unterschleißheim	82178 Puchheim	82211 Herrsching	82319 Starnberg
83607 Holzkirchen	83022 Rosenheim	83671 Benediktbeuern	85221 Dachau
86150 Augsburg	86899 Landsberg	86938 Schondorf	93049 Regensburg